DETERMINAREA RITMULUI DE CREȘTERE AL PRODUSULUI INTERN BRUT ÎN CONDIŢII PANDEMICE

Elvira NAVAL[1], doctor în informatică, cercetător ştiinţific coordonator, Institutul de Matematică şi Informatică “Vladimir Andrunachievici”, Republica Moldova

The main ghoul of these notes is referred to formulation and solving of the optimal control problem for the Growth Domestic Product evolution in a pandemic. Deterministic economic optimal control problem for the Republic of Moldova has been presented. The equilibrium growth rate of the Gross Domestic Product evolution in a pandemic is obtained. The maximum principle had been applied. Solution of the deterministic optimal control growth problem following this approach has been gotten

***Keywords**: Optimal control, deterministic approach, maximum principle, Hamilton function, equilibrium growth rate, Gross Domestic Product*

Obiectivul princip al acestor notiţe constă în formularea şi soluţionarea problemei de control optimal privind evoluţia Produsului Intern Brut în pandemie. Problema de control optimal determinist este prezentată. Rata de creştere echilibrată a Produsului Intern Brut în pandemie este obţinută. Principiul de maximum a fost aplicat. Soluţia problemei de control determinist urmând acest principiu s-a realizat.

***Cuvinte cheie:** Control optimal, abordare deterministă, principiul de maximum, funcţia Hamilton , rata de creştere echilibrată, Produsul Intern Brut*

JEL classification: C 61, C68.
UDC: 339.5(478)/519.8

1. Introducere

În prezenta lucrare se formulează problema de control optimal determinist. Funcţia obiectiv reprezintă utilitatea cu elasticitatea constantă de înlocuire.

1. Principiul de maximum determinist

Vom considera următoarea formulare a problemei de control optimal:

$$\max_{(C,L_Y,L_R)} \mathrm{L} = \int_0^{\infty} e^{(\beta_k-\rho)t}\frac{C^{1-\vartheta}}{1-\vartheta}dt$$

Supusă restricţiilor:
supusă restricţiilor

$\dot{K} = Y - C = K^{\alpha}L_Y^{1-\alpha} - C,\ \ K(0)=0;$

$L_Y = L - L_R,$

unde

$x=(K,L_R)$ şi $F = e^{(\beta_1-\rho)t}\dfrac{C^{1-\vartheta}}{1-\vartheta}$, funcţia de utilitate cu elasticitatea de înlocuire constantă ϑ, ρ este rata subiectivă de discont, β_k este subvenţia pentru stimularea capitalizării economiilor.

Aici K este stocul de capital implicat în activitatea economică, L_R este numărul de decese provocate de noul CORONA virus (COVID-19) atestat în Republica Moldova, A este parametru care caracterizează productivitatea în sectorul de producţie finală, L_Y este forţa de muncă în cadrată în sectorul de fabricare al bunurilor finale, L_R este numărul persoanelor apte de muncă decedate [3], C este consumul final. Numărul deceselor este calculat ca media pe întreg intervalul de examinare, $g = \sigma$ fiind constantă. $f = Y - C = K^{\alpha} AL_Y^{1-\alpha} - C$. Condiţiile de optimalitate respective acuma sunt [1-2, 4 -5]:

Şi condiţiile de optimalitate pentru programarea dinamică fiind date de:

$$0 = \max_{\vartheta}\left[F + \frac{\partial L}{dt} + \frac{\partial L}{\partial x}\frac{dx}{dt}\right] \tag{1}$$

Ecuaţia (1)este ecuaţia HJB şi poate fi transcrisă ca

$$0 = \max_{\vartheta}[F + L_t + L_x f\ ] \tag{2}$$

$$0 = \max_{\vartheta}[L_t + H]$$

unde H este funcţia Hamilton definită ca

$$H = F + L_x f \tag{3}$$

Derivând ecuaţia (2) în raport cu x, primim:

$$L_{xt} + F_x + L_{xx} f + f_x L_x = 0$$

$$L_{xt} + L_{xx} f = - F_x - f_x L_x \tag{4}$$

Folosind regula derivării prin părţi obţinem:

$$\frac{dL_x}{dt} = \frac{\partial L_x}{\partial t} + \frac{\partial L_x}{\partial x}\frac{dx}{dt} = L_{xt} + L_{xx} f \tag{5}$$

Substituind (4) in (5)primim:

$$\frac{dL_x}{dt} = - F_x - f_x L_x \tag{6}$$

În final,vom considera că,la formularea principiului de maximum,problema este prezentată sub forma liniară – forma Mayer, atunci $k = 0$ iar ecuaţiile (3) şi (6) devin:

$$H = L_x f \tag{7}$$

$$\frac{dL_x}{dt} = - f_x L_x$$

Să notăm prin $\mu_1 = L_{x_1}$, prin $\mu_2 = L_{x_2}$ şi atunci v-om obţine sistemul de ecuaţii diferenţiale de ordinal unu în raport cu vectorul variabilei de stare

$$\frac{dL_{x_1}}{dt} = -F_{x_1} - f_{x_1} L_{x_1} - \frac{1}{2}(\sigma^2)_{x_1} L_{x_1 x_1} \Rightarrow \frac{d\mu_1}{dt} = -\mu_1 \alpha \frac{Y}{K}$$

$$\frac{dL_{x_2}}{dt} = -F_{x_2} - f_{x_2} L_{x_2} - \frac{1}{2}(\sigma^2)_{x_2} L_{x_2 x_2} \Rightarrow \frac{d\mu_2}{dt} = -\mu_2 b$$

Şi maximizarea funcţionalului obiectiv în raport cu C, L_Y, L_R ne va oferi

$$\frac{d\mu_1}{dt} = -\mu_1 \alpha \frac{Y}{K}$$

De aici obţinem:

$$\frac{\dot{\mu}_1}{\mu_1} = -\frac{\alpha Y}{K}, \quad \frac{\dot{\mu}_2}{\mu_2} = -b$$

Dacă în sistemul de ecuaţii primite să introducem raportul dintre variabilele μ_1 şi μ_2 atunci vom obţine că din primul sistem vine că $\frac{\dot{\mu}_1}{\mu_1} = -\alpha \frac{Y}{K}$, iar în echilibru ritmurile de creştere ale variabilelor conjugate este identic,şi deci $\frac{\dot{\mu}_1}{\mu_1} = \frac{\dot{\mu}_2}{\mu_2}$, apoi ţinând cont de faptul că $g_{opt} = g_C = \frac{\dot{C}}{C} = \frac{1}{\vartheta}\left(\frac{\alpha K}{Y} + \beta - \rho\right)$, şi folosind ultima egalitate dintre variabilele μ_1 şi μ_2, se va obţine $g_{opt} = \frac{1}{\vartheta}(b + \beta - \rho)$.

Concluzii

În prezenta lucrare a fost formulată problema de control optimal determinist. La soluţionarea ei a fost aplicată metoda principiului de maximum. Abordarea propusă pentru soluţionarea problemei de control optimal permite obţinerea ritmului de creştere echilibrată al Produsului Intern Brut. Aplicând această metodă au fost primite ecuaţiile principiului de maximum determinist. S-a constatat că în starea de echilibru toate variabilele manifestă ritmuri de creştere identice.

References

1. DIWEKAR, U.M. (1995). Batch Distillation. Simulation, Optimal Design and Control. Washington, DC, USA: Taylor and Francis.
2. DIWEKAR, U.M., Introduction to Applied Optimization. Norwell, MA: Kluwer Academic Publishers, 2003.
3. http://www.statistica.md
4. NAVAL, E. The stochastic optimal growth problem. Buletinul AŞM. Matematica. 2012, nr. 1(68) 15-21. ISSN: 1024-7696.
5. NAVAL, E. Economic growth modeling under government policy uncertainty. The Yearbook of “Gheorghe Zane” Institute of Economic Researches, 2018 edition.43-54.